PS91 – Bases de coordonnées

Simon CHABOT

5 octobre 2009

Table des matières

1 Coordonnées polaires – (2D)

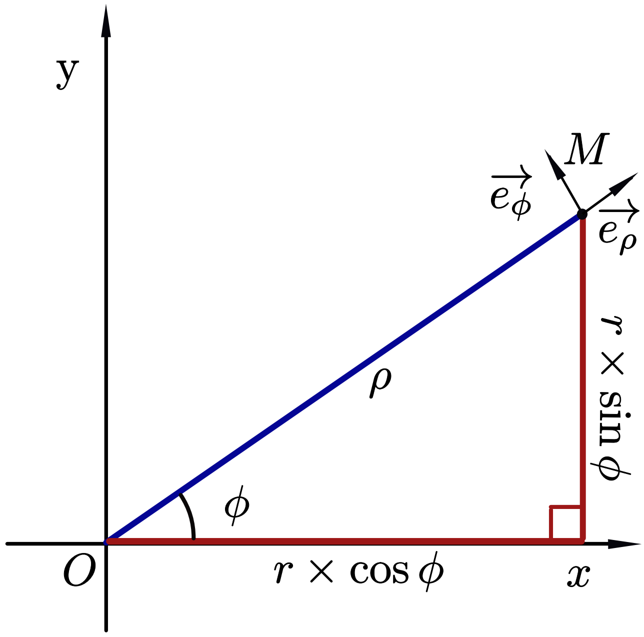

FIGURE 1 – Représentation d'un point M en coordonnées polaires

On a : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$

1.1 Calcul des dérivées de vecteurs...

Projection de $\overrightarrow{e_\rho}$ dans la base cartésienne.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_\rho} &= \cos\phi\overrightarrow{e_x} + \sin\phi\overrightarrow{e_y} \\
\rightarrow \dot{\overrightarrow{e_\rho}} &= \dot\phi \times -\sin\phi\overrightarrow{e_x} + \dot\phi \times \cos\phi\overrightarrow{e_y} \\
&= \dot\phi\,(-\sin\phi\overrightarrow{e_x} + \cos\phi\overrightarrow{e_y}) \\
&= \dot\phi\overrightarrow{e_\phi}
\end{aligned}$$

Projection de $\overrightarrow{e_\phi}$ dans la base cartésienne

$$\begin{aligned}
\dot{\overrightarrow{e_\phi}} &= \dot\phi \times -\cos\phi\overrightarrow{e_x} - \dot\phi \times \sin\phi\overrightarrow{e_y} \\
&= \dot\phi\,(-\cos\phi\overrightarrow{e_x} - \sin\phi\overrightarrow{e_y}) \\
&= \dot\phi\overrightarrow{e_\rho}
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \dot\phi\overrightarrow{e_\phi}}$ et $\boxed{\dot{\overrightarrow{e_\phi}} = -\dot\phi\overrightarrow{e_\rho}}$

1.2 Expression de la vitesse

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{\overrightarrow{OM}} \\
&= \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\overrightarrow{e_\rho}} \\
&= \boxed{\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\phi}\overrightarrow{e_\phi}}
\end{aligned}$$

1.3 Expression de l'accélération

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \dot{\vec{v}} \\
&= \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\overrightarrow{e_\rho}} + \dot{\rho}\dot{\phi}\overrightarrow{e_\phi} + \rho\ddot{\phi}\overrightarrow{e_\phi} + \rho\dot{\phi}\dot{\overrightarrow{e_\phi}} \\
&= \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\overrightarrow{e_\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\overrightarrow{e_\phi} + \rho\ddot{\phi}\overrightarrow{e_\phi} - \rho\dot{\phi}^2\overrightarrow{e_\rho} \\
&= \boxed{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overrightarrow{e_\phi}}
\end{aligned}$$

2 Coordonnées cylindriques – (3D)

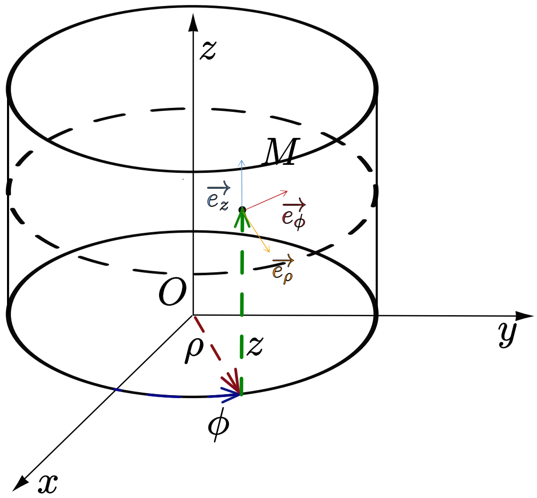

FIGURE 2 – Représentation d'un point M en coordonnées cylindriques

On a : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$

2.1 Expression de la vitesse

De façon à analogue à la précédente, on trouve : $\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\phi}\overrightarrow{e_\phi} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}}$

2.2 Expression de l'accélération

De même : $\boxed{\overrightarrow{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overrightarrow{e_\phi} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$

3 Coordonnées sphériques – (3D)

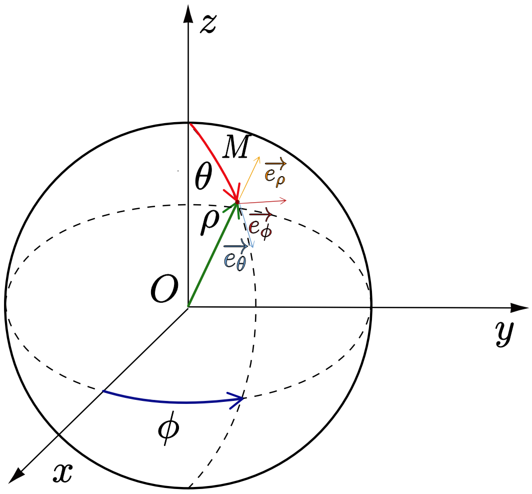

FIGURE 3 – Représentation d'un point M en coordonnées sphériques

On a : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$

3.1 Expression de la vitesse

$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\dot{\phi}\sin\theta\overrightarrow{e_\phi}}$

4 Passer d'une base à une autre

4.1 Des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\theta &= \arccos\frac{z}{\rho} \\
\phi &= \begin{cases} \arccos\frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{Si } y \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{Si } y < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

4.2 Des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ y &= \rho \cos\theta \end{aligned}$$

4.3 Des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

4.4 Des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \sin\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

4.5 Des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \sin\phi \end{aligned}$$

4.6 Des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$