Notes et analyse de l'article *On waves* publié par Lord Rayleigh en 1876 dans *Philosophical magazine and Journal of Science.*

Simon Chabot

26 octobre 2014

1 Propagation

La théorie des vagues dans un canal uniforme, de section rectangulaire, quand la longueur d'onde est grande par rapport à la profondeur du canal et quand la hauteur de la vague est faible par rapport à cette quantité, a été donnée et étudiée par Lagrange. Une vague, de forme quelconque sujette à ces conditions se propage sans changer de forme. La vitesse de la vague est relative par rapport à la vitesse de l'eau au repos (i.e. $h = 0$). Si l'on attribue à l'eau une vitesse égale et opposée à celle de la vague — qui a la même vitesse relative qu'avant — alors le problème devient *stationnaire*.

1.1 Cas 2D

La question que l'on se pose est :

> *comment la pression à la surface de la vague peut-elle être faite constante par un ajustement de la force de gravité ?*

Dans la théorie des ondes longues, on suppose la longueur d'onde de la vague très supérieure à la profondeur. De ce fait, la vitesse verticale v dans le fluide peut être négligée et la vitesse horizontale u est uniforme quand chaque section du canal. Autrement dit, u est proportionnelle à la vitesse u_0, vitesse de l'eau quand la surface au repos. On appelle l la profondeur au repos et h l'élévation de la vague. u étant proportionnelle à u_0, on a :

$$u = \frac{lu_0}{l+h} \tag{1}$$

de telle sorte que l'on retrouve $u = u_0$ quand $h = 0$.

L'écoulement étant supposé stationnaire, l'équation de Bernoulli (2) est vérifiée le long des lignes de courant, et l'on a :

$$P + \rho\frac{u^2}{2} + \rho g z = \mathcal{B} \tag{2}$$

La surface libre h constitue une ligne de courant, on peut évaluer (2) à un endroit x_0 où $h = 0$, pour trouver la constante $\mathcal{B}$, ce qui nous donne :

$$\mathcal{B} = P_0 + \rho\frac{u_0^2}{2} \tag{3}$$

On note $P = P_0 + \delta P$, et l'on a :

$$\delta P = \rho\left(\frac{u_0^2 - u^2}{2} - gh\right) \tag{4}$$

On cherche à évaluer δP. On a :

$$\begin{aligned}
u_0^2 - u^2 &= (u_0 - u)(u_0 + u) \\
&= \left(u_0 - \frac{lu_0}{l+h}\right)\left(u_0 + \frac{lu_0}{l+h}\right) \\
&= u_0^2\frac{2lh + h^2}{(l+h)^2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\delta P &= \left(\frac{u_0^2}{2}\frac{2l+h}{(l+h)^2} - g\right)\rho h \\
&= \left(u_0^2\frac{l\left(1+\frac{h}{2l}\right)}{l^2\left(1+2\frac{h}{l}+\frac{h^2}{l^2}\right)} - g\right)\rho h \\
&= \left(\frac{u_0^2}{l}\frac{1+\frac{h}{2l}}{\left(1+\frac{h}{l}\right)^2} - g\right)\rho h
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $h \ll l$ et donc la quantité $\frac{h}{l}$ peut, dans un premier temps être négligée. On trouve donc :

$$\delta P = \left(\frac{u_0^2}{l} - g\right)\rho h \tag{5}$$

La condition de surface libre impose que la dérivée totale de la pression P soit nulle le long de la surface libre. Autrement dit, on doit avoir $\delta P = 0$ d'où l'on tire :

$$u_0^2 = gl \tag{6}$$

Supposons maintenant la relation (6) satisfaite, et utilisons cette valeur pour évaluer une seconde approximation de δP. On a alors :

$$\delta P = \left(\frac{1+\frac{h}{2l}}{\left(1+\frac{h}{l}\right)^2} - 1 \right) \rho g h \approx -\frac{3}{2} \frac{g \rho h^2}{l} \tag{7}$$

On constate dans cette seconde approximation que la pression est déficiente partout où $h \neq 0$. La condition de surface libre n'est donc pas respectée. La vague ne peut pas garder cette forme.

Pour que la condition de surface libre soit respectée, on voit que le seul paramètre sur lequel nous pouvons jouer est la force de gravité. On voit également qu'une force constante n'est pas valable. Cherchons alors cette force sous la forme d'une fonction qui dépend de l'élévation de la vague.

On peut alors écrire δP sous la forme suivante :

$$\delta P = \rho \frac{u_0^2}{2} \frac{2hl + h^2}{(l+h)^2} - \rho \int_0^h f \mathrm{d}h \tag{8}$$

on en déduit que la condition de surface libre implique que :

$$\int_0^h f \mathrm{d}h = \frac{u_0^2}{2} \left(1 - \frac{l^2}{(l+h)^2} \right) \tag{9}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{u_0^2}{2} \left(1 - \frac{l^2}{(l+h)^2} \right) \right) \\ &= -\frac{l^2 u_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{(l+h)^2} \right) \\ &= u_0^2 \frac{l^2}{(l+h)^3} \end{aligned}$$

On constate ainsi que la force doit varier inversement proportionnellement au cube de la distance entre le fond du canal et la hauteur de la vague. Sous ces condition, la vague se propage sans aucune déformation.

Remarque 1.1.1 *Sous l'hypothèse d'une vitesse horizontale uniforme dans la hauteur, comme le suppose la théorie des ondes longues, on constate qu'une vague ne peut pas se propager sans changer de forme – sauf si l'on joue sur la force de gravité, mais c'est un peu compliqué. Cette hypothèse est aussi utilisée pour dériver les équations de Saint-Venant. Ce qui explique pourquoi les équations de Saint-Venant forment des fronts lorsqu'elles sont résolues.*

1.2 Cas 3D

Rayleigh se propose ensuite d'étudier une vague dans un canal où la section sous le niveau du repos subirait une légère variation. En effet, selon que le canal rétrécisse ou s'élargisse, la hauteur de la vague sera amenée à changer.

On appelle A la surface de la section sous le niveau du repos et b la largeur du canal. En utilisant la même condition sur la vitesse que précédemment (i.e. la vitesse verticale est négligée, la vitesse horizontale ne dépend que de x. Ainsi u est uniforme dans une section, car le débit est conservé). On a donc :

$$(A + bh)u = Au_0 \tag{10}$$

Comme précédemment, on cherche à faire en sorte que la condition de surface libre soit respectée (i.e. continuité de pression à la surface). On utilise donc la relation de Bernoulli, en régime stationnaire. Et on trouve :

$$\frac{u_0^2 - u^2}{2} = gh \tag{11}$$

En supposant h petit, on néglige les termes en h^2 et Abh devant A^2, on arrive alors à la relation suivante :

$$\frac{u_0^2 - u^2}{2} = \frac{2Abh}{A^2 + 2Abh}u_0 = \frac{2bh}{A}u_0 \tag{12}$$

En injectant ce résultat dans (11), il vient :

$$u_0^2 = \frac{gA}{b} \tag{13}$$

Ainsi, quand u_0 prend cette valeur, la condition de surface libre est respecté et la vague garde sa forme.

TODO : Parler de la formule du Green

1.3 Variation de la section A

Supposons maintenant que l'aire A de la section varie, graduellement, de A_0 à A. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a :

$$(A + bh)u = A_0u_0 \tag{14}$$

en supposant b constant. La condition du surface libre impose alors :

$$u_0^2 - u^2 = u_0^2\left(1 - \frac{A_0^2}{(A + bh)^2}\right) = 2gh \tag{15}$$

On suppose les variations entre A et A_0 petites, de telles sortes que nous ayons $A = A_0 + \delta_A$. On cherche alors une expression de h, la hauteur de la vague. En négligeant les petites termes d'ordre 2 (c'est-à-dire δ_A^2, h^2 et $\delta_A h$), il vient alors de l'expression précédente que :

$$h = \frac{\delta A}{b}\left(\frac{1}{\frac{gA_0}{bu_0^2} - 1}\right) \tag{16}$$

Que se passe-t-il en fonction de vitesse du courant u_0 ? de δA ? Si on suppose que la vitesse du courant u_0 est inférieure à celle de vague, c'est à dire $gA_0 > bu_0^2$, alors h a le même signe que δA. C'est-à-dire qu'une contraction du canal produit une vague en creux, une vague *négative*. Un élargissement du canal produit une élévation de la vague.

Inversement, si la vitesse du courant u_0 supérieure à celle de la vague, i.e. $gA_0 < bu_0^2$, alors h a le signe opposé de δA. Une contraction élève la vague, un élargissement produit un creux.

Si la vitesse du courant u_0 tend vers celle de la vague $\sqrt{\frac{gA}{b}}$, alors la vague peut se maintenir elle même sans variation de A. Si A varie, alors les effets cités ci-dessus sont amplifiés. L'équilibre est donc très instable.

2 La vague solitaire

La *vague solitaire* est le nom donné par M. Scott Russell a une vague particulière, observée en 1844. La longueur d'onde de la vague était de six à huit fois la profondeur du canal et donc, entre dans le cadre de la théorie des ondes longues. Mais, ces vagues avaient des propriétés très différentes des autres ondes longues. Par exemple, selon que la vague soit positive ou négative (i.e. une élévation ou un creux). Les vagues positives se propagent sur des grandes distances sans se déformer ; les vagues négatives se rompent très vite et se dissipent.

Certains contemporains de Russell, comme Airy et Stokes ne reconnurent pas ce type de vagues, arguant que la théorie des ondes longues était bien connue et contenue dans l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = g\kappa \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} \tag{17}$$

De même, selon Airy, une vague *négative* peut être décrite par cette même équation simplement en change de signe du coefficient. Quant à Stokes, il dit qu'effectivement, il semblerait que les expériences de Russell montrent bien un nouveau type de vague. Encore faudrait-il en donner une équation.

TODO : Expliquer pourquoi il est nécessaire de chercher u comme une fonction de x *et* de y

Soit u et v les vitesses horizontales et verticales de l'écoulement supposé irrotationel et incompressible. De ce fait, il existe ϕ et ψ, une fonction de potentiel et de courant, telles que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{18}$$

En choisissant $y = 0$, comme étant le fond du canal, on peut choisir u et v comme suit, étant donné que cela satisfait l'équation de Laplace [1] :

$$\begin{cases} u = \cos\left(y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) f(x) = f - \frac{y^2}{2!} f'' + \frac{y^4}{4!} f^{(4)} + \dots \\ v = -\sin\left(y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) f(x) = -yf' + \frac{y^3}{3!} f^{(3)} + \dots \end{cases} \tag{19}$$

où $f(x)$ est la vitesse horizontale au fond, à $y = 0$.

Ainsi, on constatera que la fonction de courant ψ qui convient est :

$$\psi = yf - \frac{y^3}{3!} f'' + \frac{y^5}{5!} f^{(4)} + \dots \tag{20}$$

Si P est la pression à la surface, nous avons (équation de Bernoulli) :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + gy = \mathcal{B} \tag{21}$$

autrement dit, nous avons :

$$u^2 + v^2 = \varpi - 2gy \tag{22}$$

avec $\varpi = 2\left(\mathcal{B} - \frac{P}{\rho}\right)$.

Remarque 2.0.1 *Ici, y est vue comme une fonction de x, et donne la position de la surface libre.*

Toute la question est donc de savoir comment faire en sorte que ϖ soit une constante — condition de surface libre — en changeant la forme de y.

On a :

$$\begin{aligned} y'u &= y'f - y'\frac{y^2}{2!} f'' + \dots \\ &= (yf)' - yf' - \left(\frac{y^3}{3!} f''\right)' + \frac{y^3}{3!} f^{(3)} + \dots \\ &= -yf' + \frac{y^3}{3!} f^{(3)} + \dots + (yf)' - \left(\frac{y^3}{3!} f^{(3)}\right)' + \dots \\ &= v + \psi' \end{aligned}$$

1. Il s'agit de la solution $\Delta\phi = 0$ la plus générale satisfaisant la condition d'imperméabilité du fond.

Or, nous nous intéressons à $y'u$ au niveau de la surface libre, qui est une ligne de courant et donc où ψ est une constante. Ainsi, nous avons :

$$y'u = v \qquad \qquad \textit{à la surface} \tag{23}$$

On en déduit alors que $u^2+v^2 = (1+y'^2)\,u^2$, ce qui nous permet alors d'écrire :

$$yu = \sqrt{\frac{\varpi y^2 - 2gy^3}{1+y'^2}} \tag{24}$$

soit, en remplaçant u par son expression :

$$yf - \frac{y^3}{2!}f'' + \frac{y^5}{4!}f^{(4)} + \ldots = \sqrt{\frac{\varpi y^2 - 2gy^3}{1+y'^2}} \tag{25}$$

Maintenant, f peut être éliminée de cette expression par approximations successives, en remarquant qu'on peut itérer sur une méthode de point fixe grâce à l'expression de ψ. Ainsi, on a :

$$\psi\left(1 - \frac{y^3}{3}\left(\frac{1}{y}\right)'' - \frac{y^5}{45}\left(\frac{1}{y}\right)^{(4)} - \ldots\right) = \sqrt{\frac{\varpi y^2 - 2gy^3}{1+y'^2}} \tag{26}$$

Il faut voir y comme une fonction lente de x. Ou bien comme une fonctionne de ωx. Rayleigh propose de regarder l'approximation jusqu'à l'autre 3. Nous avons alors :

$$\psi^2\left(1 - \frac{y^3}{3}\left(\frac{1}{y}\right)''\right)^2 (1+y'^2) = \varpi y^2 - 2gy^2 \tag{27}$$

soit, après factorisation et simplification :

$$\psi^2\left(1 - \frac{1}{3}y'^2 + \frac{2}{3}yy''\right) = \varpi y^2 - 2gy^2 \tag{28}$$

L'idée est alors de chercher la fonction y qui va assurer que ϖ soit constant, et donc que la condition de surface libre soit respectée. En intégrant (28) en supposant ϖ constant, on va trouver une surface libre, définie par y, sur laquelle ϖ variera très peu [2].

TODO : expliquer comment on la résout

2. la quantité ϖ ne serait être une constante absolue, étant données les approximations d'ordre supérieur à 3 faites…

On a ainsi :

$$\frac{1}{3}y'^2 = Cy + \frac{\varpi y^2 - gy^3}{\psi^2} + 1 \tag{29}$$

où C est une constante qui sera à déterminer.

La quantité ϖ est constante et peu donc être déterminée là où la surface est au repos. Et on a :

$$\varpi = u_0^2 + 2gl \tag{30}$$

où l est la profondeur du canal et u_0 la vitesse du fluide. De même, la valeur de la fonction ψ est constante le long du ligne de courant, et donc de la surface. On peut donc également l'évaluer là où la surface est au repos, et ayant $u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}$, on en déduit que :

$$\psi = \int_0^l u_0 \mathrm{d}y = u_0 l \qquad \textit{à la surface}$$

Et ainsi (29) devient :

$$\frac{1}{3}y'^2 = 1 + Cy + \frac{u_0^2 + 2gl}{u_0^2 l^2}y^2 - \frac{g}{u_0^2 l^2}y^3 \tag{31}$$

Dans cette nouvelle équation, g et l sont donnés. En revanche, u_0 et C peuvent être choisis de sorte à satisfaire certaines conditions. On veut par exemple que y' soit nul là où la surface est au repos (i.e. $y = l$) et là où la vague est maximale (i.e. $y = l'$). En utilisant ces conditions, on peut éliminer C et trouver u_0 en fonction de l'. On trouve :

$$u_0^2 = gl' \qquad C = -\frac{l + 2l'}{ll'} \tag{32}$$

Ainsi, u_0 et C sont déterminés. L'équation (29) peut alors être simplifiée en :

$$\frac{1}{3}y'^2 = 1 - \frac{l + 2l'}{ll'}y + \frac{l' + 2l}{l'l^2}y^2 - \frac{1}{l'l^2}y^3 \tag{33}$$

Nous connaissons deux racines du membre de droite, l et l', on trouvera même que l est racine double. Ainsi on a :

$$y'^2 + \frac{3}{l'l^2}(y - l)^2(y - l') = 0 \tag{34}$$

À partir de cette équation, qui décrit donc la surface libre, on peut tirer plusieurs conclusions sur la forme de la vague :

1. Il n'y a un seul minimum ou maximum, qui est l'.

2. Pour que l'équation est un sens, il est nécessaire que le terme $y - l'$ soit négatif. De fait, la condition de surface libre ne peut être respectée — à ce niveau d'approximation — par une vague négative. (Russel disait que les vagues négatives ne se propageaient pas longtemps, voici sans doute une explication)

En dérivant (34), il vient :

$$y'' = \frac{3(y-l)}{2l^2l'}\left(2l' + l - 3y\right) \tag{35}$$

On en conclut donc que le changement de courbure se produit quand $y = l$ et quand $y = l + \frac{2}{3}(l' - l)$. C'est à dire aux deux tiers de la hauteur de la vague[3].

L'équation différentielle (34) peut être résolue. Voici la solution donnée par Rayleigh :

$$x = \pm\sqrt{\frac{l^2l'}{3\beta}}\log\left(\frac{2\beta}{\eta} - 1 + 2\sqrt{\frac{\beta^2}{\eta^2} - \frac{\beta}{\eta}}\right) \tag{36}$$

avec $\beta = l' - l$ et $\eta = y - l$. La constante d'intégration a été choisie telle que $x = 0$ quand $y = l'$ (ou $\beta = \eta$).

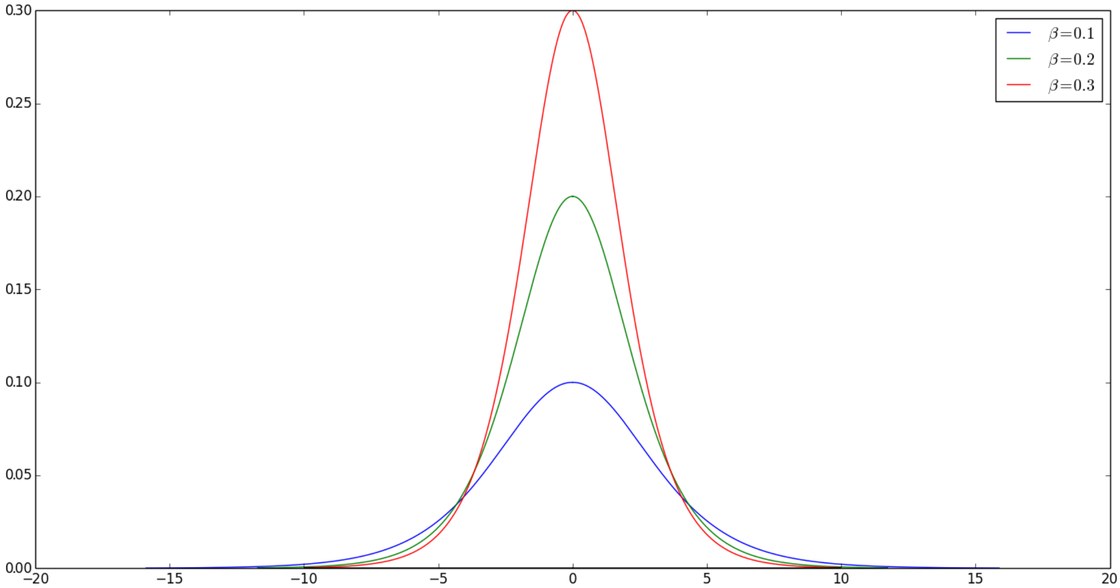

FIGURE 1: Vagues solitaires, pour différentes amplitudes β, avec une profondeur $l = 1$.

Dans un canal donné (i.e. une profondeur l), il ne peux y avoir qu'une seule vague solitaire d'une amplitude β donnée. La forme est imposée par la dynamique.

3. Résultat trouvé expérimentalement par Bazin.

3 Vagues périodiques en eaux profondes

Dans cette section, Rayleigh nous propose un modèle décrivant des vagues périodiques en eaux profondes. C'est à dire quand la profondeur est - beaucoup - plus grande que la longueur d'onde des vagues. La théorie le précédent la plus connue était celle de Gernster, Rankine et Froude. Dans cette théorie le mouvement de chaque particule est circulaire et chaque cercle a une vitesse uniforme. Si h et κ sont les coordonnées du centre d'un de ces cercles, horizontalement et vers le bas respectivement, alors la position d'une particule est donné à l'instant t par :

$$\begin{cases} \zeta = h + Re^{-\frac{\kappa}{R}} \sin\left(at + \frac{h}{R}\right) \\ \eta = \kappa + Re^{-\frac{\kappa}{R}} \cos\left(at + \frac{h}{R}\right) \end{cases} \tag{37}$$

Cette théorie respecte bien les principes de la mécanique des fluides, mais implique une rotation moléculaire :

$$\omega = \frac{ae^{-\frac{2\kappa}{R}}}{1 - e^{-\frac{2\kappa}{R}}} \tag{38}$$

TODO : Dire pourquoi cela est gênant physiquement.

Rayleigh propose une formulation où il n'y a pas de rotation moléculaire. De la même manière que dans la section précédemment, on impose une vitesse à l'eau opposée à celle des vagues, de telle sorte que l'écoulement soit considéré comme stationnaire.

Supposons que l'écoulement soit incompressible et irrotationel. Il existe alors un potentiel des vitesse ϕ et une fonction de courant ψ. On se donne un repère orthonormé, tel que l'axe des abscisses soit horizontal vers la gauche et l'axe des ordonnées vers le bas avec $y = 0$ représentant le niveau de l'eau moyen. Alors ϕ et ψ sont tels que :

$$\begin{cases} \phi = cx + \alpha e^{-\kappa y} \sin kx \\ \psi = cy - \alpha e^{-\kappa y} \cos kx \end{cases} \tag{39}$$

où c est la vitesse, α une constant dépendant de l'amplitude et κ le nombre d'onde, tel que $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, avec λ la longueur d'onde. À grande profondeur, i.e. y grand, l'écoulement représenté tend vers une écoulement uniforme, puisque $e^{-\kappa y}$ tend vers zéro. De fait, nous avons juste à nous assurer que la condition de surface libre est bien respectée — c'est ce qui va nous imposer les paramètres du modèle.

Soit U la vitesse résultante en un point à la surface. On a alors :

$$\begin{aligned} U^2 &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \\ &= c^2 + 2c\kappa\alpha e^{-\kappa y} \cos kx + k^2\alpha^2 e^{-2\kappa y} \\ &= c^2 + 2c\kappa(cy - \psi) + \kappa^2\alpha^2 e^{-2\kappa y} \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Bernoulli, exprimée à la surface, il vient que :

$$\frac{P}{\rho} = \mathcal{B} + \frac{c^2}{2} + (g - c^2\kappa)y + \psi c\kappa - \frac{\kappa^2\alpha^2}{2}e^{-2\kappa y} \tag{40}$$

En négligeant α^2, on voit que la condition de surface libre est respectée si (i.e. P est constante, on rappelle que ψ est constant à la surface) :

$$c = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{41}$$

Ainsi, quand c a cette valeur, la condition de surface libre est satisfaite (approximativement). On observe alors un train de vagues avançant à une vitesse c sans se déformer.

3.1 Une meilleure approximation

On cherche ici à avoir une meilleure approximation de c. Nous avions négligé les termes d'ordre 2 en α. Dans cette partie, nous montons à l'ordre 3.

Le profile de la vague peut être déterminé à l'aide de ψ, qui est constante sur les lignes de courant et donc sur là surface libre. Partant de ψ supposé constant, on cherche à exprimer y en fonction de x. On fait pour cela des approximations successives, jusqu'à l'ordre 3 en α.

Partant de l'expression de ψ à la surface, supposée constante, on a :

$$y = \frac{\psi_0}{c} + \frac{\alpha}{c}e^{-\kappa y}\cos\kappa x \tag{42}$$

Étant proche du niveau zéro, y peut être supposé petit et on peut écrire un développement limité de l'exponentielle :

$$y = \frac{\psi_0}{c} + \frac{\alpha}{c}(1 - \kappa y)\cos\kappa x \tag{43}$$

On peut ensuite, utiliser une méthode de point fixe sur cette expression, jusqu'à faire apparaître les termes d'ordre 3 de α. On a alors :

$$y = \frac{\psi_0}{c} + \frac{\alpha}{c}\left(1 - \frac{\kappa}{c}\left(\psi_0 + \alpha e^{-\kappa y}\cos\kappa x\right)\right)\cos\kappa x \tag{44}$$

Des puissances de cosinus apparaissent. Il faut alors le linéariser. On choisi la constant ψ_0 de telle sort que la moyenne de y soit nulle.

TODO : Détailler les calculs

On abouti alors à l'expression suivante :

$$y = \frac{\alpha}{c}\left(1 + \frac{5}{8}\frac{\kappa^2\alpha^2}{c^2}\right)\cos\kappa x - \frac{\kappa\alpha^2}{2c^2}\cos 2\kappa x + \frac{3}{8}\frac{\kappa^2\alpha^3}{c^3}\cos 3\kappa x \tag{45}$$

On obtient ainsi une décomposition spectrale de y. On appelle a le coefficient suivant :

$$a = \frac{\alpha}{c}\left(1 + \frac{5}{8}\frac{k^2\alpha^2}{c^2}\right) \tag{46}$$

Ce coefficient a a un sens physique. Il représente l'amplitude — deux fois l'amplitude pour être exact — du premier nombre d'onde, c'est à dire, le principal. En revanche, la quantité α que nous avons utilisée jusque là n'a pas de sens physique à proprement parler. C'est pourquoi nous allons réécrire les fonctions de courant, de potentiel des vitesses et de surface libre en fonction de a et non de α.

Pour cela, on exprime α en fonction de a et de α lui-même. Puis on itère sur ce point fixe jusqu'à l'ordre 3 en α. On a donc :

$$\frac{\alpha}{c} = a - \frac{5}{8}\frac{k^2\alpha^3}{c^3} \tag{47}$$

On calcule ainsi $\frac{\alpha}{c}$ au cube, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{c}\right)^3 &= \left(a - \frac{5}{8}\frac{k^2\alpha^3}{c^3}\right)^3 \\ &= a^3 - 3a^2\frac{5}{8}\frac{k^2\alpha^3}{c^3} + O(\alpha^6)\end{aligned}$$

Or, on voit dans l'équation (47), en faisant une approximation à l'ordre 2 en α, que la quantité a est de l'ordre du quotient $\frac{\alpha}{c}$. Autrement dit, la quantité $a^2\frac{\alpha^3}{c^3}$ est de l'ordre de α^5. Donc négligeable. On abouti alors a la relation suivante :

$$\alpha = ac\left(1 - \frac{5}{8}k^2a^2\right) \tag{48}$$

On peut ainsi injecter (48) dans les équations précédentes. Étant donné que $\frac{\alpha}{c}$ et a sont du même ordre, on négligea les ordres supérieurs à 3 en a. On abouti alors à :

$$\phi = cx + ca\left(1 - \frac{5}{8}k^2a^2\right)e^{-\kappa y}\sin\kappa x \tag{49}$$

$$\psi = cy - ca\left(1 - \frac{5}{8}k^2a^2\right)e^{-\kappa y}\cos\kappa x \tag{50}$$

$$y = a\cos\kappa x - \frac{\kappa a^2}{2}\cos 2\kappa x + \frac{3}{8}k^2a^3\cos 3\kappa x \tag{51}$$

Grâce à cette nouvelle expression de ψ, on peut de nouveau calculer une la résultante des vitesses à la surface. Ce qui nous permettra d'obtenir une meilleure approximation de la vitesse.

On a :

$$\begin{aligned} U^2 &= c^2 + 2c\kappa(cy - \psi) + \kappa^2\alpha^2 e^{-2\kappa y} \\ &\approx c^2 + 2c\kappa(cy - \psi) + \kappa^2\alpha^2(1 - 2\kappa y) \qquad \text{en développant l'exponentielle} \\ &\approx c^2 - 2c\kappa\psi + \kappa^2\alpha^2 + 2c^2\kappa y - 2\kappa^3\alpha^2 y \end{aligned}$$

Injectant cette expression dans la relation de Bernoulli, il vient que les coefficients dont dépend y doivent s'annuler pour que la condition de surface libre soit respectée. Autrement, on doit avoir :

$$c^2\kappa - \kappa^3\alpha^2 - g = 0 \tag{52}$$

Soit :

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{g}{\kappa} + \kappa^2\alpha^2 \\ &= \frac{g}{\kappa} + \kappa^2\left(ac\left(1 - \frac{5}{8}\kappa^2 a^2\right)\right)^2 \\ &= \frac{g}{\kappa} + \kappa^2 a^2 c^2\left(1 - \frac{5}{8}\kappa^2 a^2\right)^2 \end{aligned}$$

On fait alors, comme précédemment une méthode de point fixe, en remplaçant c^2 par son expression et en négligeant les termes en a^4 ou plus. *In fine*, il vient :

$$c = \sqrt{\frac{g}{\kappa}\left(1 + \kappa^2 a^2\right)} \tag{53}$$

On dispose ainsi d'une meilleure approximation de la vitesse de propagation. Les relations (51) et (53) ont été également données par Stokes.

TODO : Parler de la dernière partie sur la propriété de translation du à la non-rotationalité ?

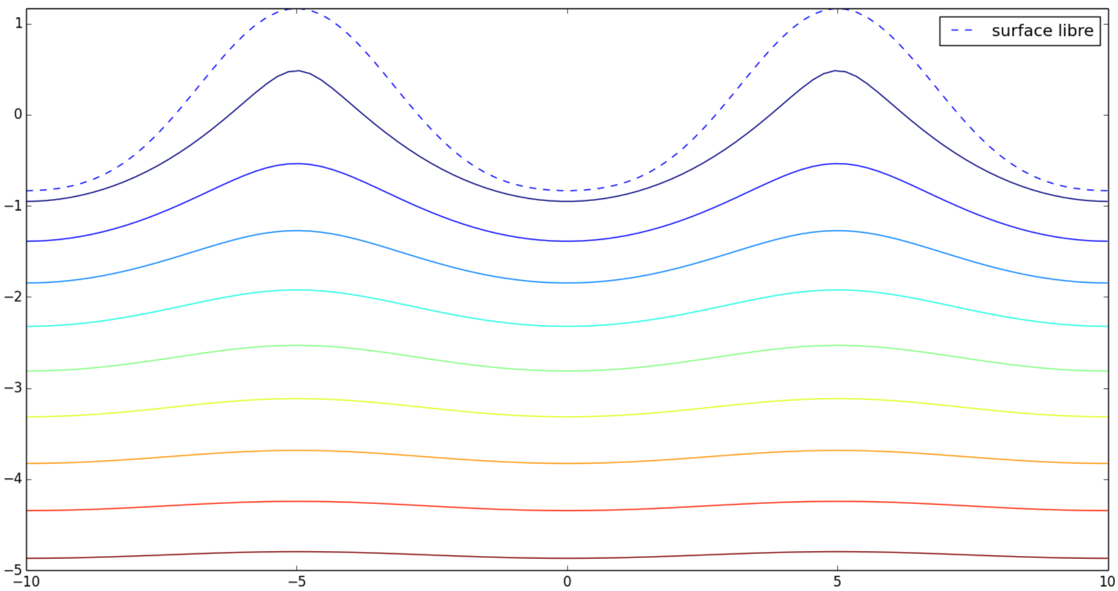

FIGURE 2: Exemple d'une vague issue de cette théorie. Avec en pointillés la surface libre, et en lignes continues quelques iso-valeurs de la fonction de courant