NF93 – Introduction à la théorie des graphes

Chabot Simon

Le 16 avril 2011

1 Qu'est-ce qu'un graphe ?

Définition 1.1. *Un* graphe *est un ensemble de points avec des lignes connectant quelques uns de ces points. On représente ainsi une relation*

Par exemple, le graphe 1 représente la relation :

$$\mathcal{R} = \{(A, B); (B, A); (B, E); (D, E); (D, C); (C, A); (A, D); (C, F)\}$$

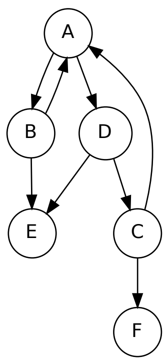

Figure 1 – Graphe orienté

1.1 Graphe orienté / non-orienté / valué

Définition 1.2 (Graphe orienté)**.** *C'est un couple* $G = (X, U)$ *où :*

– X *est un ensemble dont les éléments sont appelés* sommets [1] *;*

1. ou *nœuds*

- *U est une partie de $X \times X$ dont les éléments sont appelés* arcs*.*

Définition 1.3 (Graphe non-orienté)**.** *C'est un couple $G = (X, E)$ où :*
- *X est un ensemble dont les éléments sont appelés* sommets *;*
- *E est un sous-ensemble de parties de X, contenant chacune au plus 2 éléments. Les éléments sont appelés* arrêtes*.*

Définition 1.4 (Graphe valué)**.** *C'est un triplet $G = (X, U, v)$ où (X, U) est un graphe et $v : U \mapsto \mathbb{R}$ une application que associe un réel à un arc.*

1.2 Notations

On note :
- $U(i)$ l'ensemble des arcs incidents en i ;
- $U^+(i)$ l'ensemble successeurs de i ;
- $U^-(i)$ l'ensemble des prédecesseurs de i ;
- $d(i) = \operatorname{card} U(i)$ le degré de i ;
- $d^+(i) = \operatorname{card} U^+(i)$ le demi-degré extérieur de i ;
- $d^-(i) = \operatorname{card} U^-(i)$ le demi-degré intérieur de i ;

2 Chemins, chaînes et cycles

2.1 Chemins

Définition 2.1 (Chemin)**.** *Un* chemin *est une suite de sommets $[x_1, \ldots, x_p]$ telle que les arcs $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{p-1}, x_p)$ appartiennent au graphe*

Valeur *Sommes des valuations — si elles existent — des arcs du chemin ;*

Longeur *Nombre d'arcs ;*

extrémité initiale x_1 *;*

extrémité terminale x_p *;*

2.1.1 Chemins particuliers

Élémentaire le chemin ne passe pas deux fois par le même sommets ;

Hamiltonien le chemin passe une et une seule fois par tous les sommets ;

Simple le chemin ne passe pas deux fois par le même arcs ;

Eulérien le chemin passe une fois et une seule fois par chaque arcs.

Définition 2.2 (Circuit)**.** *C'est un chemin dont l'extrémité initiale se confond avec l'extrémité terminale.*

Remarque 2.1.1. *Quelques implications remarquables :*

- *élémentaire* $\Rightarrow$ *simple*
- *hamiltonien* $\not\Leftarrow$ *eulérien*
- *hamiltonien* $\Rightarrow$ *élémentaire*
- *eulérien* $\not\Rightarrow$ *élémentaire*

2.2 Chaînes et cycles

Définition 2.3 (Chaînes)**.** *Une* chaîne *est une suite d'arcs* $[u_1, \ldots, u_p]$ *telle qu'une extrémité de l'arc* u_i $(2 \leqslant i \leqslant p-1)$ *est commune avec l'arc* u_{i+1}*, alors que l'autre est commune avec* u_{i-1}*.*

Définition 2.4 (Cycle)**.** *Un* cycle *est une chaîne dont l'extrémité initiale est confondue avec l'extrémité terminale.*

Par exemple, si on considère le graphe 2, on a une chaînes de 1 à 8

$$[(3,1),(3,2),(2,6),(6,9),(8,9)]$$

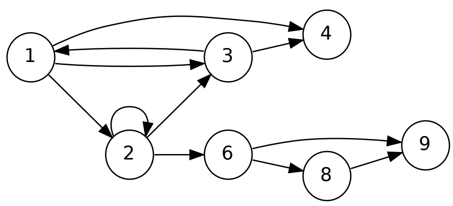

FIGURE 2 – Chaînes

3 Sous-graphe et graphe partiel

Définition 3.1 (Sous-graphe)**.** *Le* sous-graphe *associé au sous-ensemble* A *de* X *est le graphe* G_A *définit par*

$$G_A = (A, U \cap A \times A)$$

Définition 3.2 (Graphe partiel)**.** *Un* graphe partiel G' *est un graphe ayant les mêmes sommets que* G *et dont l'ensemble des arcs* U' *est tel que* $U' \subset U$*.*

Par exemple, un graphe partiel du graphe 2 peut être le suivant :

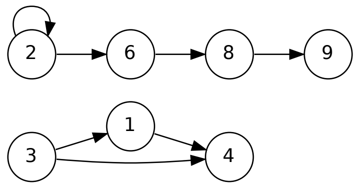

FIGURE 3 – Graphe partiel

4 Connexité

4.1 Connexité faible

Définition 4.1. *On dit que "i est (faiblement) connexe à j" et on note $i\ C\ j$ si :*
- $i = j$
- *ou s'il existe une* chaîne *allant de i à j.*

Il s'agit d'une relation d'équivalence [2] *dont les classes sont appelées* composantes (faiblement) connexes.

4.2 Connexité forte

Définition 4.2. *On dit que "i est fortement connexe à j" et on note $i\ FC\ j$ si :*
- $i = j$
- *ou s'il existe un* circuit *allant que i à j.*

Il s'agit d'une relation d'équivalence *dont les classes sont appelées* composantes fortement connexes.

Si on considère le graphe 3 on a, par exemple, $1\ C\ 7$ et $1\ FC\ 3$. Nous avons aussi comme :
- composantes connexes :
  - $\{1, 3, 2, 4, 8, 7\}$
  - $\{6, 9, 10\}$
  - $\{11, 12\}$
- composantes fortement connexes :
  - $\{1, 2, 3, 4\}$
  - $\{8, 7\}$
  - $\{6, 9\}$
  - $\{10\}$
  - $\{11\}$
  - $\{12\}$

2. symétrique, réfléxive, transitve

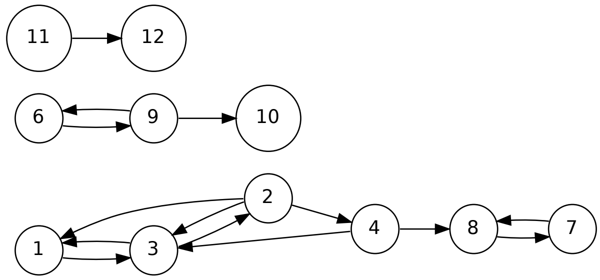

FIGURE 4 – Connexité

4.3 Graphe réduit

Définition 4.3. *Le* graphe réduit G_R *est le graphe* $(X/FC, V)$ *dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des classes de forte connexité et dont tout arc relie deux classes distinctes.*

Le graphe réduit du graphe 4 est donc :

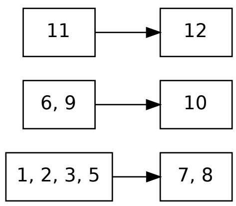

FIGURE 5 – Graphe réduit

5 Des théorèmes, des propositions et (encore) des définitions

5.1 Théorème d'Euler

Théorème 5.1 (d'Euler)**.** *Le théorème dit que :*

1. *Un graphe* connexe *admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair, sauf deux au plus.*

2. *Un graphe* connexe *admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*

5.2 Le nombre *c-chromatique*

Définition 5.1. *Le nombre c-chromatique est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets d'un graphe sans que deux sommets adjacents du graphe soient de la même couleur.*

Théorème 5.2. *Le nombre c-chromatique d'un grapfe est inférieur ou égal à $r+1$, où r est le plus grand degré des sommets.*

Proposition 5.1. *Nous avons :*

1. *Tout graphe contenant un triangle complet nécessite au moins trois couleurs.*
2. *Tout graphe contenant un quadrilatère complet nécessite au moins quatre couleurs.*

5.2.1 Trouver le nombre c-chromatique

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit degré. Et on choisit une couleur pour le premier sommet de la liste.
2. On colorie de cette couleur tous les sommets non-adjacents.
3. On réitère le procédé avec une autre couleur jusqu'à ce que tous les sommets soient coloriés.

5.3 Propriété sur les graphes

Proposition 5.2 (Lemme de Koenig). *S'il existe un chemin entre x et y, alors il existe un* chemin élémentaire *entre x et y.*

L'idée de la preuve consiste à prendre un chemin particulier entre x et y et à supprimer tous le cycle (dans le but d'obtenir le chemin le plus court de x à y, qui est élémentaire).