NF93 – Les ensembles

Chabot Simon

Le 20 avril 2011

1 Décidabilité d'un ensemble

Définition 1.1. *On dit qu'un ensemble E est* décidable *s'il existe un algorithme capable d'évaluer la proposition $x \in E, \forall x$ en un nombre* fini *d'étapes.*

Définition 1.2. *On dit que E est un ensemble* semi-décidable *s'il existe un algorithme capable d'évaluer la proposition $x \in E, \forall x \in E$ en un nombre* fini *d'étapes.*

2 Rappels sur les opérations ensemblistes

2.1 Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1a}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1b}$$

2.2 Différence symétrique

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \tag{2a}$$

ou

$$A \Delta B = \{x \in A \text{ xor } x \in B\} \tag{2b}$$

3 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 3.1. *L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté*

$$\mathcal{P}(E) = \{X | X \subset E\}$$

Proposition 3.1. *On a :*

1. $\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$
2. $X \subset X \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(E)$
3. $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow E = F$
4. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
5. $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ *en général.*
6. $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{card} E}$

4 Partition

Définition 4.1 (Partition)**.** *On appelle* partition *de E une famille finie ou infinie de sous-ensemble de E vérifiant que :*

- *Aucun d'entre eux n'est vide ;*
- *Ils sont disjoints deux à deux ;*
- *Leur réunion est E lui-même.*

Proposition 4.1. *Une* partition *de E est donc un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.*

5 Les relations

5.1 Propriétés sur les relations

Définition 5.1 (Réflextive)**.** *Soit A est un ensemble et $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est* réflextive *si et seulement si*

$$\forall x \in A, x\mathcal{R}x$$

Définition 5.2 (Symétrique)**.** *Soit A un ensemble et $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est* symétrique *si et seulement si*

$$\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

Définition 5.3 (Anti-symétrique)**.** *Soit A un ensemble et $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est* anti-symétrique *si et seulement si*

$$\forall x, y \in A, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall x, y \in A, (x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg y\mathcal{R}x)$$

Définition 5.4 (Relation d'équivalence)**.** *Soit A un ensemble et $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est une* relation d'équivalence *si et seulement si $\mathcal{R}$ est :*
- *Réflextive ;*
- *Symétrique ;*
- *Transitive.*

Définition 5.5 (Composition des relations)**.** *Si $\mathcal{R} \subset A \times B$, et $\mathcal{S} \subset B \times C$, on défini la relation :*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B, a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{S}c\}$$

Définition 5.6 (Classe d'équivalence)**.** *Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. On appelle* classe d'équivalence *le sous ensemble défini par*

$$C(x) = \{y \in A | x\mathcal{R}y\}$$

Exemple 5.1. *Soit la relation "modulo 5". La classe d'équivalence de* 0 *est alors* $C(0) = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

Définition 5.7 (Ensemble quotient)**.** *L'*ensemble quotient *de E par la relation d'équivalent $\mathcal{R}$, noté $E/\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de E suivant $\mathcal{R}$:*

$$E/\mathcal{R} = \{C(x) | x \in E\}$$

Exemple 5.2. *Soit l'ensemble $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{R}$ la relation "a le même signe que". On a alors :*

$$E/\mathcal{R} = \left\{\mathbb{Z}_+^*, \mathbb{Z}_-^*, \{0\}\right\}$$

5.2 Les relations d'ordre

Définition 5.8 (Relation d'ordre)**.** *Soit A un ensemble et $\mathcal{R} \subset A \times A$ une relation. On dit que $\mathcal{R}$ est une* relation d'ordre *sur A si et seulement si $\mathcal{R}$ est :*
- *Réflextive ;*
- *Anti-symétrique ;*
- *Transitive.*

Si $\mathcal{R}$ est irréflextive, alors $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre strict.

Définition 5.9 (Ordre total/partiel)**.** *Une relation d'ordre $\preceq$ sur A est dite* totale *si tous les éléments de A sont comparables, sinon elle est dite* partiel.

Définition 5.10 (Diagramme de Hasse)**.** *Soit $\preceq$ une relation d'ordre partiel dans un ensemble A. Cette relation peut être représentée par un diagramme de Hasse selon les principes suivants :*
- *Les éléments sont représentés par des sommets*
- *Si $a \preceq b$, b est placé plus haut que a.*
- *a et b sont joints par une arrête ssi $a \preceq b$ et n^o $\exists z \in A, a \preceq z \wedge z \preceq b$.*

5.2.1 Majoration, minoration

Définition 5.11. *Soit $\preceq$ une relation d'ordre, et x et y deux éléments de E. Si $x \preceq y$, on dit que x est* minorant *et y est* majorant.

Définition 5.12. *Un élément x de E est* maximal *(respectivement* minimal*) s'il n'a pas d'autre majorant (respectivement minorant) que lui-même.*

Définition 5.13. *Un élément x est le* plus grand élément *(respectivement* le plus petit élément*) de E si x est un majorant (respectivement minorant) de tous les éléments de E.*

5.3 Ensembles bien ordonnés

Définition 5.14. *Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est* bien ordonné *si toute partie non vide admet un élément minimal.*

- *L'ordre $\preceq$ est alors un bon ordre.*
- *Tout ensemble fini totalement ordonné est bien fondé*

6 Les fonctions

Définition 6.1. *Une* fonction *de E vers F est une relation de $E \times F$ telle que tout élément de E soit en relation avec au plus un élément de F. On la note $f : E \to F$.*

Définition 6.2. *Une* application *de E vers F est une relation de $E \times F$ telle que tout élément de E soit en relation avec un unique élément de F.*

7 Cardinaux et dénombrabilité

7.1 Ensemble fini

Définition 7.1 (Ensemble fini). *E est fini s'il peut être mis en bijection avec un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1, \ldots, n\}$. On dit alors que E a pour cardinal n et on le note $\operatorname{card} E = n$ ou $|E| = n$.*

Si tel n'est pas le cas, on dit que E est infini.

Proposition 7.1 (Formule du crible).

$$|\cup_{i=1}^{n} E_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{n} |E_1 \cap \ldots \cap E_i|$$

Proposition 7.2 (Lien entre cardinalité et bijection). *Soit deux ensembles E et F. On a alors les propositions suivantes :*

1. *Il existe une* injection *de E dans F si et seulement si* $|E| \leqslant |F|$
2. *Il existe une* surjection *de E dans F si et seulement si* $|E| \geqslant |F|$
3. *Il existe une* bijection *de E dans F si et seulement si* $|E| = |F|$.

7.2 Ensemble infini

Définition 7.2 (Ensemble infini). *Un ensemble est infini s'il peut être mis en bijection avec l'une de ses parties propres.*

Si tel n'est pas le cas, on dit que l'ensemble est fini.

Exemple 7.1. *L'ensemble $\mathbb{N}$ est infini, car on peut le mettre en bijection avec $\mathbb{N}^\star$. Par exemple :*

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \mapsto \mathbb{N}^\star \\ n & \mapsto n+1 \end{cases}$$

Définition 7.3 (Dénombrable). *On dit qu'un ensemble E est* dénombrable *s'il est équipotent à N. C'est à dire que* $\operatorname{card} E = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Théorème 7.1 (de Cantor). $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Preuve du théorème 7.1. On suppose $\mathbb{R}$ dénombrable. Alors $]0;1[$ l'est aussi. On a donc $]0;1[= \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_i = 0, a_1^i a_2^i \ldots a_n^i$. On construit $x = 0, b_1 b_2 \ldots b_n$ avec $b_i \neq a_i^i \quad \forall i$.

Par construction, x n'est pas dans l'ensemble énuméré, et pourtant $x \in]0;1[$. Donc $]0;1[$ n'est pas dénombrable, et $\mathbb{R}$ non plus a fiortiori. □

Théorème 7.2. *Il n'existe pas de bjection entre E et $\mathcal{P}(E)$. Donc $|E| \leqslant |\mathcal{P}(E)|$.*

Théorème 7.3. $\mathbb{R}$ *et $\mathcal{P}(N)$ sont équipotent*

Corollaire 7.1. *Il existe une infinité d'infinis. Car si $\mathbb{R}$ est un infini, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ en est un autre, et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(R))$ aussi, etc.*

8 Principes d'induction

8.1 Principe d'induction général

Définition 8.1. *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble bien ordonné. Soit P une propriété telle que :*

- *P soit vraie pour tout élément minimal de E ;*
- *Pour tout élément non minimal de E, si P est vraie pour $y \prec x$, alors P est vraie pour x.*

Alors la propriété est vraie pour tous les éléments de E.

8.2 Principe de récurrence forte

Définition 8.2. *Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$, telle que :*
- *$P(0)$ soit vraie ;*
- $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall m < n, P(m)) \Rightarrow P(n)$

Index